

Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 03, No. 3 (2014), hal 153 – 162.

ANALISIS DAN SIMULASI MODEL MATEMATIKA PENYAKIT DEMAM *DENGUE* DENGAN SATU SEROTIF VIRUS *DENGUE*

Hendri Purwanto, Evi Noviani, Muhlasah Novitasari Mara

INTISARI

Demam *dengue* merupakan penyakit endemik yang ditularkan melalui vektor nyamuk *Aedes aegypti*. Penyakit ini terdapat di lebih dari 100 negara di Amerika, Afrika, maupun Asia, khususnya negara-negara yang beriklim tropis. Persamaan diferensial dapat digunakan untuk merepresentasikan penyebaran virus *dengue* yang terjadi dalam selang waktu t dan dimodelkan dalam bentuk model matematika. Model matematika dalam penelitian ini mencoba merepresentasikan tentang penyebaran demam *dengue* berdasarkan data yang diperoleh dan asumsi yang digunakan. Model matematika yang digunakan adalah model matematika yang diperoleh dari penelitian Syafruddin dan Noorani (2012) yang terdiri dari subpopulasi Susceptible (S), Exposed (E), Infected (I), dan Recovered (R). Model matematika SEIR selanjutnya dianalisis untuk melihat perilaku solusi dari sistem. Analisis kestabilan dari sistem dalam penelitian ini adalah stabil asimtotik yang menunjukkan adanya kasus endemik dan tidak stabil yang menunjukkan kasus nonendemik. Simulasi model matematika SEIR menunjukkan bahwa memerlukan waktu yang sangat lama untuk memastikan manusia yang terinfeksi memiliki terbebas dari infeksi virus *dengue*. Hal ini terjadi karena infeksi virus *dengue* yang terjadi secara terus-menerus antara populasi manusia dan nyamuk.

Kata kunci: demam *dengue*, endemik, model SEIR, kestabilan, simulasi model.

PENDAHULUAN

Penyebaran penyakit menular dipengaruhi oleh banyak faktor salah satunya oleh faktor iklim [1]. Penyakit menular yang tersebar melalui vektor penyebar penyakit seperti demam *dengue* harus diwaspadai karena penularan penyakit ini akan semakin meningkat seiring dengan perubahan iklim. Lebih dari 100 negara yang beriklim tropis menunjukkan bahwa penyakit ini merupakan penyebab kematian utama [2]. Penyakit demam *dengue* menjadi masalah kesehatan yang serius terutama di negara-negara tropis di dunia sejak abad ke-18. Selain negara tropis, negara subtropis pernah mengalami kasus demam *dengue*. Setiap tahun kurang lebih 500.000 orang dirawat di rumah sakit dan ribuan orang diantaranya meninggal dunia akibat demam *dengue* [3].

Penyakit demam *dengue* ditularkan ke manusia melalui nyamuk sebagai vektor penyakit dalam dua bentuk yaitu demam *dengue* atau *dengue* klasik dan *dengue haemorrhagic fever* yang dapat berevolusi menjadi bentuk parah dikenal sebagai *dengue shock syndrome*. Penyakit ini disebabkan oleh empat serotif berbeda yang dikenal sebagai DEN-1, DEN-2, DEN-3, dan DEN-4 [4]. Penyakit ini akan meningkat penyebarannya pada saat musim hujan atau beberapa saat setelah musim hujan berlalu. Hal ini dikarenakan nyamuk *Aedes aegypti* sebagai vektor atau alat penyebar virus *dengue*, bertelur dan menetas telur menjadi jentik larva nyamuk di genangan air yang bersih. Jika penderita dibiarkan tanpa pengobatan, maka rata-rata kematian bisa mencapai 40% [5].

Pemodelan matematika menjadi alat pendekatan yang menarik untuk menganalisis tentang penyebaran penyakit menular. Model matematika penyebaran penyakit demam *dengue* yang dibahas dalam penelitian ini adalah model dinamik dengan model matematika SEIR (*Susceptible*, *Exposed*, *Infected*, dan *Recovered*). Model SEIR merupakan salah satu model matematika yang menganalisis penyebaran salah satu serotif dari virus *dengue* antara manusia dengan nyamuk. Model SEIR yang terbentuk berdasarkan asumsi-asumsi yang selanjutnya model dianalisis dan diinterpretasikan, agar model lebih representatif terhadap permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini.

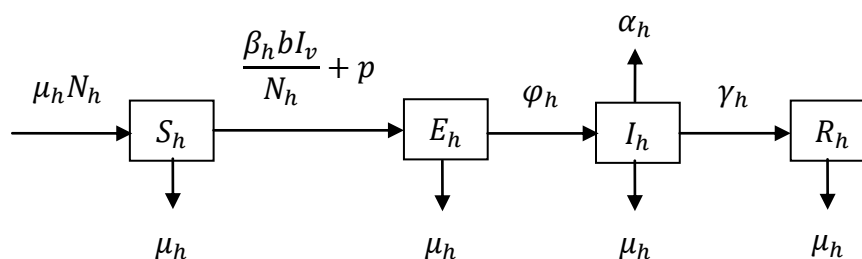
Tujuan dari penelitian ini adalah menganalisis hasil simulasi penyebaran penyakit demam *dengue* pada suatu model matematika SEIR. Penyebaran demam *dengue* pada populasi manusia (N_h) dikelompokkan dalam empat subpopulasi yaitu *susceptible* (S_h), *exposed* (E_h), *infected* (I_h), dan *recovered* (R_h). Sedangkan pada populasi nyamuk (N_v) dikelompokkan dalam tiga subpopulasi yaitu *susceptible* (S_v), *exposed* (E_v), dan *infected* (I_v). Hal ini dikarenakan karena waktu hidup nyamuk yang singkat sehingga menyebabkan nyamuk terinfeksi virus *dengue* selama hidupnya. Penyebaran virus *dengue* hanya dilakukan oleh satu jenis vektor yaitu nyamuk *Aedes aegypti* dan satu jenis serotif virus *dengue*. Populasi Manusia dan populasi nyamuk dikategorikan dalam satu kelompok yang sama dalam suatu waktu dengan jumlah yang konstan dan penularan virus *dengue* berlangsung secara terus-menerus. Pada populasi manusia diasumsikan terdapat sejumlah orang yang sudah terjangkit virus *dengue*. Individu yang telah sembuh mempunyai kekebalan sehingga tidak ada aliran dari subpopulasi *recovered* ke subpopulasi *susceptible*.

Analisis dinamika model penyebaran penyakit demam *dengue* dimulai dengan menyusun asumsi-asumsi untuk menyederhanakan model, kemudian mendefinisikan parameter yang digunakan pada model. Selanjutnya, dibentuk diagram transfer penyebaran penyakit demam *dengue* dan berdasarkan diagram transfer tersebut dibentuk model matematika penyebaran penyakit demam *dengue*. Model matematika yang diperoleh selanjutnya disederhanakan menjadi sistem. Sistem tersebut terbentuk dari model matematika penyebaran penyakit demam *dengue* populasi manusia dan populasi nyamuk. Kajian penyebaran penyakit demam *dengue* pada penelitian ini hanya pada kelas subpopulasi *susceptible host*, *exposed host*, *infected host*, *exposed vector*, dan *infected vector* yang digunakan. Hal ini bertujuan untuk mengetahui penyebaran penyakit demam *dengue* antara populasi manusia dan nyamuk. Sistem selanjutnya ditentukan titik *equilibrium*nya.

Sistem yang diperoleh dalam penelitian ini adalah model dengan bentuk sistem persamaan diferensial nonlinear. Sehingga model tersebut dilinearisasi dengan membentuk matriks Jacobian dari sistem [6]. Selanjutnya, ditentukan nilai eigen dari matriks Jacobian tersebut dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz [7]. Nilai eigen yang diperoleh kemudian dianalisis kestabilan sistemnya [8]. Setelah menyelidiki kestabilan dari sistem, langkah selanjutnya dilakukan simulasi data dengan menggunakan nilai parameter di Selangor, Malaysia [9]. Selanjutnya ditentukan titik *equilibrium*, nilai eigen, dan kestabilan dari sistem dengan nilai parameter yang telah ditentukan. Langkah terakhir adalah memberikan interpretasi model matematika penyebaran penyakit demam *dengue* yang dilakukan dengan menggunakan simulasi numerik dari nilai parameter.

MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT DEMAM DENGUE

Model matematika penyebaran penyakit demam *dengue* merupakan suatu model matematika yang menggambarkan dinamika penyebaran penyakit demam *dengue* antara populasi manusia dan populasi nyamuk. Model matematika dalam penelitian ini dibagi dalam dua populasi yaitu populasi manusia (*host*) dan nyamuk (*vector*). Model matematika penyebaran penyakit demam *dengue* pada populasi manusia direpresentasikan dalam diagram transfer sebagai berikut:



Gambar 1. Diagram Proses Penyebaran Penyakit Demam *Dengue* di dalam Populasi Manusia

Berdasarkan Gambar 1. model matematika untuk dinamika penyebaran virus *dengue* di dalam populasi manusia sebagai berikut [9]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS_h}{dt} &= \mu_h N_h - \left(\frac{\beta_h b I_v}{N_h} + p + \mu_h \right) S_h \\ \frac{dE_h}{dt} &= \left(\frac{\beta_h b I_v}{N_h} + p \right) S_h - (\mu_h + \varphi_h) E_h \\ \frac{dI_h}{dt} &= \varphi_h E_h - (\alpha_h + \mu_h + \gamma_h) I_h \\ \frac{dR_h}{dt} &= \gamma_h I_h - \mu_h R_h \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Keterangan:

S_h : Jumlah subpopulasi yang rentan terjangkit virus *dengue* dalam populasi manusia.

E_h : Jumlah subpopulasi yang terjangkit virus *dengue* dalam populasi manusia.

I_h : Jumlah subpopulasi yang terinfeksi virus *dengue* dalam populasi manusia.

R_h : Jumlah subpopulasi yang telah sembuh dalam populasi manusia.

μ_h : Laju kelahiran atau kematian dalam suatu populasi manusia.

β_h : Peluang keberhasilan penyebaran virus *dengue* dari nyamuk ke manusia.

b : Banyaknya gigitan yang disebabkan oleh satu ekor nyamuk.

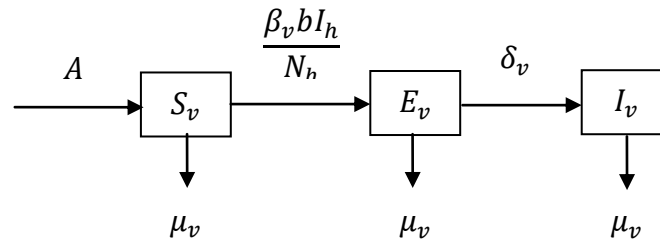
p : Persentase keberhasilan terinfeksi nyamuk oleh virus *dengue*.

φ_h : Peluang seseorang pada populasi manusia untuk terinfeksi virus *dengue*.

α_h : Peluang seseorang mengalami kematian yang disebabkan karena penyakit yang disebabkan oleh virus *dengue*.

γ_h : Peluang seseorang mengalami kesembuhan dari infeksi virus *dengue*.

Model matematika penyebaran penyakit demam *dengue* pada populasi nyamuk direpresentasikan dalam diagram transfer sebagai berikut:



Gambar 2. Diagram Proses Penyebaran Penyakit Demam *Dengue* di dalam Populasi Nyamuk

Berdasarkan Gambar 2. model matematika untuk dinamika penyebaran virus *dengue* di dalam populasi nyamuk sebagai berikut [6]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS_v}{dt} &= A - \left(\mu_v + \frac{\beta_v b I_h}{N_h} \right) S_v \\ \frac{dE_v}{dt} &= \left(\frac{\beta_v b I_h}{N_h} \right) S_v - (\mu_v + \delta_v) E_v \\ \frac{dI_v}{dt} &= \delta_v E_v - \mu_v I_v \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Keterangan:

S_v : Jumlah subpopulasi yang rentan terjangkit virus *dengue* dalam populasi nyamuk.

E_v : Jumlah subpopulasi yang terjangkit virus *dengue* dalam populasi nyamuk.

I_v : Jumlah subpopulasi yang terinfeksi virus *dengue* dalam populasi nyamuk.

A : Banyaknya kelahiran yang merupakan perkalian dari laju kelahiran nyamuk dengan jumlah penduduk (N_v).

μ_v : Laju kematian dalam suatu populasi nyamuk.

β_v : Peluang keberhasilan penyebaran virus *dengue* dari manusia ke nyamuk.

δ_v : Peluang terinfeksi virus *dengue* pada populasi nyamuk.

Laju perubahan populasi pada manusia dan nyamuk adalah konstan sehingga [6]:

$$\begin{aligned} \bullet \quad N_h &= S_h + E_h + I_h + R_h. \\ R_h &= N_h - S_h - E_h - I_h. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad N_v &= \frac{A}{\mu_v} = S_v + E_v + I_v. \\ S_v &= N_v - E_v - I_v = \frac{A}{\mu_v} - E_v - I_v. \end{aligned} \quad (4)$$

Perilaku penyebaran penyakit demam *dengue* pada populasi manusia dan nyamuk dapat ditentukan dengan membentuk model matematika penyebaran penyakit demam *dengue* sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS_h}{dt} &= \mu_h N_h - \left(\frac{\beta_h b I_v}{N_h} + p + \mu_h \right) S_h \\ \frac{dE_h}{dt} &= \left(\frac{\beta_h b I_v}{N_h} + p \right) S_h - (\mu_h + \varphi_h) E_h \\ \frac{dI_h}{dt} &= \varphi_h E_h - (\alpha_h + \mu_h + \gamma_h) I_h \\ \frac{dE_v}{dt} &= \left(\frac{\beta_v b I_h}{N_h} \right) S_v - (\mu_v + \delta_v) E_v \\ \frac{dI_v}{dt} &= \delta_v E_v - \mu_v I_v \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Sistem (5) merupakan sistem yang dibentuk dari sistem (1) dan (2) dengan asumsi laju perubahan populasi pada persamaan (3) dan (4). Sistem (5) dapat disederhanakan dengan asumsi:

$$x = \frac{S_h}{N_h}, u = \frac{E_h}{N_h}, y = \frac{I_h}{N_h}, w = \frac{E_v}{N_v}, \text{ dan } z = \frac{I_v}{N_v} = \frac{I_v}{A/\mu_v}. \quad (6)$$

kemudian substitusikan asumsi (6) ke sistem (5), sehingga diperoleh:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mu_h(1 - x) - px - \alpha xz \\ \frac{du}{dt} &= (\alpha z + p)x - (\mu_h + \varphi_h)u \\ \frac{dy}{dt} &= \varphi_h u - (\alpha_h + \mu_h + \gamma_h)y \\ \frac{dw}{dt} &= \gamma_v(1 - w - z)y - (\mu_v + \delta_v)w \\ \frac{dz}{dt} &= \delta_v w - \mu_v z \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

dengan $\gamma_v = \beta_v b$ dan $\alpha = \frac{\beta_h b A}{N_h \mu_v}$.

Titik *equilibrium* dari sistem (7) diperoleh dengan terlebih dahulu menolkan ruas kiri sistem (7) yaitu memenuhi $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{du}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0, \frac{dw}{dt} = 0$, dan $\frac{dz}{dt} = 0$, selanjutnya sistem (7) disederhanakan dengan memisalkan $a = \mu_h$, $b = a + p$, $c = \alpha$, $d = p$, $e = a + \varphi_h$, $f = \varphi_h$, $g = a + \gamma_h + \alpha_h$, $h = \gamma_v$, $j = \mu_v + \delta_v$, $k = \delta_v$, dan $l = \mu_v$. Hasil penyederhanaan sistem (7) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a - (b + cz)x \\ \frac{du}{dt} &= (d + cz)x - eu \\ \frac{dy}{dt} &= fu - gy \\ \frac{dw}{dt} &= hy(1 - w - z) - jw \\ \frac{dz}{dt} &= kw - lz \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Sistem (8) selanjutnya ditentukan nilai titik *equilibrium*nya. Titik *equilibrium* dari sistem (8) merupakan solusi yang tetap dari model matematika penyebaran penyakit demam *dengue* pada populasi manusia dan nyamuk walaupun waktu terus berganti.

Sistem (8) memiliki titik *equilibrium* yang ditentukan dengan menggunakan bantuan software matematika yaitu:

$\begin{aligned} z_1(t) &= m(\sqrt{q} - n) \\ w_1(t) &= \frac{l}{k}m(\sqrt{q} - n) \\ y_1(t) &= \frac{jlm(\sqrt{q} - n)}{hm(\sqrt{q} - n)(k + l) - kh} \\ u_1(t) &= -\frac{gjl m(\sqrt{q} - n)}{fhm(\sqrt{q} - n)(k + l) - fkh} \\ x_1(t) &= \frac{1}{b + cm(\sqrt{q} - n)} \end{aligned}$	$\begin{aligned} z_2(t) &= -m(\sqrt{q} + n) \\ w_2(t) &= -\frac{l}{k}m(\sqrt{q} + n) \\ y_2(t) &= \frac{jlm(\sqrt{q} + n)}{-hm(\sqrt{q} + n)(k + l) - kh} \\ u_2(t) &= \frac{gjl m(\sqrt{q} + n)}{-fhm(\sqrt{q} + n)(k + l) - fkh} \\ x_2(t) &= \frac{1}{b - cm(\sqrt{q} + n)} \end{aligned}$
--	---

dengan

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2c(jleg + hfka + hflda)} \\ n &= hfkda + hflda - hfkca + jlegb \\ q &= (hfkda)^2 + 2kl(hfda)^2 + 2dc(hfka)^2 + 2hfkdajlegb + (hflda)^2 + 2ldkc(hfa)^2 + \\ &\quad 2hfdajegbl^2 + (hfkca)^2 - 2hfkcjlegb + (jlegb)^2 + 4hfkdaljegc. \end{aligned}$$

Sistem (8) memiliki titik *equilibrium* endemik yaitu $z_1(t)$, $w_1(t)$, $y_1(t)$, $u_1(t)$, dan $x_1(t)$. Hal ini berarti adanya kasus penyebaran penyakit demam *dengue* antara populasi manusia dan nyamuk. Sedangkan titik *equilibrium* $z_2(t)$, $w_2(t)$, $y_2(t)$, $u_2(t)$, dan $x_2(t)$ merupakan titik *equilibrium* nonendemik, yang berarti tidak ada kasus penyebaran penyakit demam *dengue* antara populasi manusia dan nyamuk.

ANALISIS KESTABILAN MODEL

Sistem (8) diuji kestabilan dengan mensubstitusikan nilai dari titik *equilibrium* $z_1(t)$, $w_1(t)$, $y_1(t)$, $u_1(t)$, $x_1(t)$ dan $z_2(t)$, $w_2(t)$, $y_2(t)$, $u_2(t)$, $x_2(t)$. Sistem (8) merupakan sistem persamaan diferensial nonlinear, sehingga sistem (8) dilinearisasi terlebih dahulu dengan menggunakan matriks Jacobian sehingga diperoleh:

$$J = \begin{pmatrix} -b - cz & 0 & 0 & 0 & -xc \\ d + cz & -e & 0 & 0 & xc \\ 0 & f & -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h(1 - z - w) & -hy - j & -hy \\ 0 & 0 & 0 & k & -l \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Substitusikan masing-masing nilai $z_1(t)$, $w_1(t)$, $y_1(t)$, $u_1(t)$, $x_1(t)$ dan $z_2(t)$, $w_2(t)$, $y_2(t)$, $u_2(t)$, $x_2(t)$ ke matriks (9). Nilai eigen dari model matematika penyebaran penyakit demam *dengue* diperoleh jika dan hanya jika $|J - \lambda I| = 0$, dengan J merupakan matriks Jacobian sebagai matriks linearisasi dari sistem (8), λ merupakan nilai eigen, dan I merupakan matriks identitas. Nilai eigen untuk titik *equilibrium* $z_1(t)$, $w_1(t)$, $y_1(t)$, $u_1(t)$, $x_1(t)$ yaitu:

$$|J_1 - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -(b + cm(\sqrt{q} - n)) - \lambda & 0 & 0 & 0 & -\frac{ca}{cm(\sqrt{q} - n) + b} \\ cm(\sqrt{q} - n) + d & -e - \lambda & 0 & 0 & \frac{ca}{cm(\sqrt{q} - n) + b} \\ 0 & f & -g - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h - \frac{hm(\sqrt{q} - n)(k + l)}{k} & \frac{hljm(\sqrt{q} - n)}{hm(\sqrt{q} - n)(k + l) - kh} - j - \lambda & \frac{hljm(\sqrt{q} - n)}{hm(\sqrt{q} - n)(k + l) - kh} \\ 0 & 0 & 0 & k & -l - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

dengan J_1 merupakan matriks Jacobian sebagai matriks linearisasi dari sistem (8) dengan titik *equilibrium* $z_1(t)$, $w_1(t)$, $y_1(t)$, $u_1(t)$, $x_1(t)$. Sehingga diperoleh nilai eigen dari sistem (8) berupa persamaan karakteristik yaitu

$$\lambda^5 + A\lambda^4 + B\lambda^3 + C\lambda^2 + D\lambda + E. \quad (10)$$

dengan $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$, $D > 0$ dan $E > 0$, berdasarkan nilai koefisien polinomial pada persamaan (10) diperoleh nilai sebagai berikut:

$$a_0 = 1, a_1 = A, a_2 = B, a_3 = C, a_4 = D, \text{ dan } a_5 = E. \quad (11)$$

Berdasarkan persamaan (11) dapat dibentuk matriks Routh-Hurwitz:

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C & E & 0 & 0 \\ 1 & B & D & 0 & 0 \\ 0 & A & C & E & 0 \\ 0 & 1 & B & D & 0 \\ 0 & 0 & A & C & E \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Berdasarkan matriks Routh-Hurwitz (12) dapat ditentukan determinan Routh-Hurwitz yaitu:

$$\Delta_1 = a_1 = A > 0. \quad (13)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ 1 & B \end{vmatrix} = AB - C > 0. \quad (14)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C & E \\ 1 & B & D \\ 0 & A & C \end{vmatrix} = ABC + EA - A^2D - C^2 > 0. \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C & E & 0 \\ 1 & B & D & 0 \\ 0 & A & C & E \\ 0 & 1 & B & D \end{vmatrix} \\ &= ABCD + AB^2E - A^2D^2 + 2ADE - C^2D + CBE - E^2 > 0. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Delta_5 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C & E & 0 & 0 \\ 1 & B & D & 0 & 0 \\ 0 & A & C & E & 0 \\ 0 & 1 & B & D & 0 \\ 0 & 0 & A & C & E \end{vmatrix} \\ &= ABCDE - AB^2E^2 - A^2D^2E + 2ADE^2 - C^2DE + CBE^2 - E^3 > 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Berdasarkan persamaan (13), (14), (15), (16), dan (17) dapat disimpulkan bahwa nilai $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 > 0$, dan $\Delta_5 > 0$, sehingga kestabilan sistem (8) dengan titik *equilibrium* $z_1(t)$, $w_1(t)$, $y_1(t)$, $u_1(t)$, dan $x_1(t)$ adalah stabil asimtotik. Selanjutnya menentukan kestabilan dari sistem (8) dengan titik *equilibrium* $z_2(t)$, $w_2(t)$, $y_2(t)$, $u_2(t)$, dan $x_2(t)$.

$$|J_2 - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -(b - cm(\sqrt{q} + n)) - \lambda & 0 & 0 & 0 & -\frac{ca}{cm(\sqrt{q} + n) - b} \\ -cm(\sqrt{q} + n) + d & -e - \lambda & 0 & 0 & \frac{ca}{cm(\sqrt{q} + n) - b} \\ 0 & f & -g - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h + \frac{hm(\sqrt{q} + n)(k + l)}{k} & -\frac{hljm(\sqrt{q} + n)}{-hm(\sqrt{q} + n)(k + l) - kh} - j - \lambda & -\frac{hljm(\sqrt{q} + n)}{-hm(\sqrt{q} + n)(k + l) - kh} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -l - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

dengan J_2 merupakan matriks Jacobian sebagai matriks linearisasi dari sistem (8) dengan titik *equilibrium* (10). Sehingga diperoleh nilai eigen dari sistem (8) dengan titik *equilibrium* $z_2(t)$, $w_2(t)$, $y_2(t)$, $u_2(t)$, $x_2(t)$ berupa persamaan karakteristik:

$$\lambda^5 + A\lambda^4 + B\lambda^3 - C\lambda^2 - D\lambda + E. \quad (18)$$

dengan $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$, $D > 0$ dan $E > 0$, berdasarkan nilai koefisien polinomial pada persamaan (18) diperoleh nilai sebagai berikut:

$$a_0 = 1, a_1 = A, a_2 = B, a_3 = C, a_4 = D, \text{ dan } a_5 = E. \quad (19)$$

Berdasarkan persamaan (19) dapat dibentuk matriks Routh-Hurwitz:

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C & E & 0 & 0 \\ 1 & B & D & 0 & 0 \\ 0 & A & C & E & 0 \\ 0 & 1 & B & D & 0 \\ 0 & 0 & A & C & E \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Berdasarkan matriks Routh-Hurwitz (20) dapat ditentukan determinan Routh-Hurwitz yaitu:

$$\Delta_1 = a_1 = A > 0. \quad (21)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ 1 & B \end{vmatrix} = AB - C > 0. \quad (22)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C & E \\ 1 & B & D \\ 0 & A & C \end{vmatrix} = ABC + EA - A^2D - C^2 < 0. \quad (23)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C & E & 0 \\ 1 & B & D & 0 \\ 0 & A & C & E \\ 0 & 1 & B & D \end{vmatrix} \\ = ABCD + AB^2E - A^2D^2 + 2ADE - C^2D + CBE - E^2 < 0. \quad (24)$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C & E & 0 & 0 \\ 1 & B & D & 0 & 0 \\ 0 & A & C & E & 0 \\ 0 & 1 & B & D & 0 \\ 0 & 0 & A & C & E \end{vmatrix} \\ = ABCDE - AB^2E^2 - A^2D^2E + 2ADE^2 - C^2DE + CBE^2 - E^3 < 0. \quad (25)$$

Berdasarkan persamaan (21), (22), (23), (24), dan (25) dapat disimpulkan bahwa nilai $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, $\Delta_4 < 0$, dan $\Delta_5 < 0$, maka kestabilan sistem (8) dengan titik *equilibrium* $z_2(t)$, $w_2(t)$, $y_2(t)$, $u_2(t)$, $x_2(t)$ adalah tidak stabil.

SIMULASI MODEL PENYEBARAN PENYAKIT DEMAM *DENGUE*

Simulasi model dalam penelitian ini bertujuan untuk melihat dinamika penyebaran demam *dengue* dalam populasi manusia dan nyamuk. Simulasi model matematika penyebaran penyakit demam *dengue* dilakukan dengan bantuan software matematika. Simulasi model dilakukan dengan mensubstitusikan nilai parameter dari jurnal penelitian yang diperoleh dari [9]. Nilai parameter merupakan nilai yang menjelaskan kondisi penyebaran penyakit demam *dengue* di Selangor, Malaysia. Berikut ini nilai parameter yang digunakan dalam penelitian ini yaitu:

Tabel 1. Nilai Parameter Penyebaran Penyakit Demam *Dengue* [9]

Parameter	Nilai
μ_h	0,0045000
p	0.0900000
φ_h	0,1667000
γ_h	0,3288330
α_h	0,0000002
$\beta_h b$	0,7500000
$\beta_v b$	0,3750000
μ_v	0,0294100
δ_v	0,1428000

Nilai-nilai parameter pada Tabel 1 disubstitusikan ke sistem (7) sehingga diperoleh:

$$\left. \begin{aligned} 0,0045(1-x) - 0,09x - 0,006xz &= 0 \\ 0,006xz + 0,09x - (0,0045 + 0,1667)u &= 0 \\ 0,1667u - (0,0000002 + 0,0045 + 0,328833)y &= 0 \\ 0,375(1-z-w)y - (0,02941 + 0,1428)w &= 0 \\ 0,1428w - 0,02941z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

dengan $N_v = 40.570$ dan $N_h = 5.071.126$. dari sistem (26) diperoleh titik *equilibrium* dan nilai eigen yaitu:

Tabel 2. Titik Equilibrium dan Nilai Eigen dari Sistem (26)

	Titik <i>Equilibrium</i>	Nilai Eigen
1	$x_1 = 0,04757968687$ $u_1 = 0,02503441244$ $y_1 = 0,01251971460$ $w_1 = 0,00268342330$ $z_1 = 0,01302933857$	$\lambda_1 = -0,333376748419412$ $\lambda_2 = -0,09433810075088$ $\lambda_3 = -0,171797339058096 + 0,00483541917409483I$ $\lambda_4 = -0,171797339058096 - 0,00483541917409483I$ $\lambda_5 = -0,0298956287193864$
2	$x_2 = 57,675646990$ $u_2 = -1,489722030$ $y_2 = -0,7450102850$ $w_2 = -3,241071846$ $z_2 = -15,73699624$	$\lambda_1 = -0,474413920752232$ $\lambda_2 = -0,169015166145597 + 0,256281660830224I$ $\lambda_3 = -0,169015166145597 - 0,256281660830224I$ $\lambda_4 = 0,138631183749529$ $\lambda_5 = -0,00448026756610344$

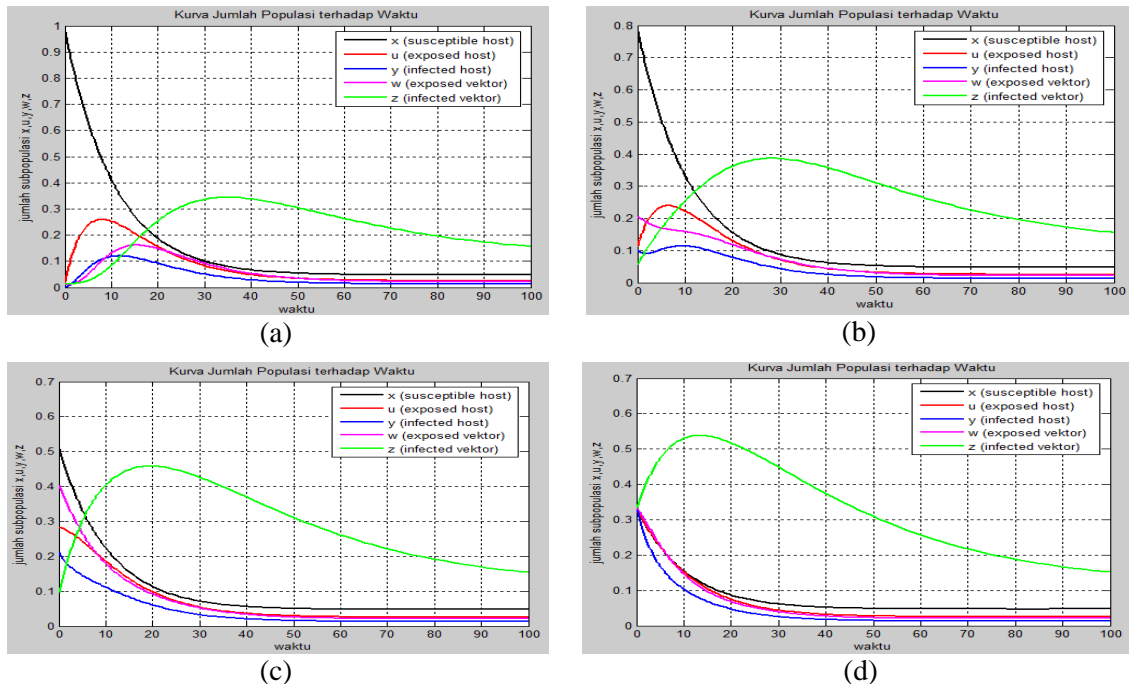
Berdasarkan Tabel (2) kestabilan dari sistem (26) dengan titik *equilibrium* 1 adalah stabil asimtotik. Hal ini menunjukkan kasus endemik, artinya akan terjadi penyebaran virus *dengue* di dalam tubuh manusia dan nyamuk. Titik *equilibrium* 1 menunjukkan bahwa laju subpopulasi manusia yang rentan atau berpotensi untuk terjangkit virus *dengue* adalah 0,04757968687 jiwa/bulan. Laju subpopulasi manusia yang terjangkit namun belum terinfeksi virus *dengue* adalah 0,02503441244 jiwa/bulan, laju subpopulasi manusia yang terinfeksi virus *dengue* adalah 0,0125197146 jiwa/bulan. Selain itu, laju subpopulasi nyamuk sebagai *vector* yang terjangkit virus *dengue* adalah 0,002683423300 jiwa/bulan dan laju subpopulasi nyamuk yang terinfeksi virus *dengue* adalah 0,01302933857 jiwa/bulan. Sedangkan kestabilan dari sistem (26) dengan titik *equilibrium* 2 adalah tidak stabil. Hal ini terjadi karena pada titik *equilibrium* x_2, u_2, y_2, w_2 , dan z_2 hanya x_2 yang memiliki nilai positif sedangkan u_2, y_2, w_2 , dan z_2 memiliki nilai negatif.

Simulasi penyebaran penyakit demam *dengue* ditunjukkan dalam Gambar (3), dengan sumbu x adalah waktu (bulan) sedangkan sumbu y adalah jumlah subpopulasi *susceptible host* (x), *exposed host* (u), *infected* (y), *exposed vector* (w), dan *infected vector* (z). Kondisi nilai awal yang digunakan dalam simulasi model matematika SEIR penyebaran demam *dengue* yaitu:

Tabel 3. Nilai Awal Simulasi Model Penyebaran Demam *Dengue*

Gambar	Nilai Awal
Gambar 3 (a)	$S_h(0) = \frac{5.000.521}{5.071.126}$ $E_h(0) = \frac{70.305}{5.071.126}$ $I_h(0) = \frac{300}{5.071.126}$ $E_v(0) = \frac{500}{40.570}$ dan $I_v(0) = \frac{490}{40.570}$
Gambar 3 (b)	$S_h(0) = \frac{4.000.500}{5.071.126}$ $E_h(0) = \frac{560.200}{5.071.126}$ $I_h(0) = \frac{510.426}{5.071.126}$ $E_v(0) = \frac{8.305}{40570}$ dan $I_v(0) = \frac{2.205}{40570}$
Gambar 3 (c)	$S_h(0) = \frac{2.576.213}{5.071.126}$ $E_h(0) = \frac{1.432.626}{5.071.126}$ $I_h(0) = \frac{1.062287}{5.071.126}$ $E_v(0) = \frac{16.321}{40.570}$ dan $I_v(0) = \frac{3.878}{40.570}$
Gambar 3 (d)	$S_h(0) = \frac{1.690.376}{5.071.126}$ $E_h(0) = \frac{1.690.375}{5.071.126}$ $I_h(0) = \frac{1.690.375}{5.071.126}$ $E_v(0) = \frac{13.523}{40.570}$ dan $I_v(0) = \frac{13.523}{40.570}$

Hasil simulasi model matematika penyebaran penyakit demam *dengue* dengan nilai kondisi awal pada Tabel 3 dapat dilihat pada grafik berikut.



Gambar 3. Grafik Penyebaran Penyakit Demam *Dengue*

Berdasarkan Gambar (3.a.b.c.), laju pertumbuhan subpopulasi *susceptible host* pada mulanya turun yang cukup signifikan hingga mendekati angka 0,1 pada $t = 30$. Berkurangnya subpopulasi *susceptible host* dikarenakan adanya perpindahan subpopulasi *susceptible host* menjadi subpopulasi *exposed host* dan subpopulasi *infected host*. Laju pertumbuhan subpopulasi *exposed host* berkurang mulai dari $t = 10$ karena adanya perpindahan dari kelas subpopulasi *exposed host* menjadi kelas subpopulasi *infected host*. Laju pertumbuhan subpopulasi *infected host* berkurang, kemudian kondisi grafik yang turun pada subpopulasi *susceptible host*, *exposed host*, dan *infected host* akan berjalan terus menerus hingga menuju suatu titik dan stabil asimtotik di titik tersebut sampai $t \rightarrow \infty$. Hal ini berarti tidak ada penyebaran virus *dengue* di dalam masing-masing kelas pada populasi manusia.

Berdasarkan Gambar (3.a.b.c.), laju pertumbuhan subpopulasi *exposed vector* dipengaruhi oleh banyaknya nyamuk yang menggigit manusia yang terinfeksi virus *dengue*. Lama-kelamaan laju pertumbuhan subpopulasi *exposed vector* dan *infected vector* berkurang sehingga grafik perlahan bergerak turun hingga menuju suatu titik dan stabil asimtotik di titik tersebut sampai $t \rightarrow \infty$. Hal ini berarti tidak ada penyebaran virus *dengue* di dalam masing-masing kelas pada populasi nyamuk.

Berdasarkan Gambar (3.d) laju pertumbuhan subpopulasi *susceptible host*, *exposed host*, *infected host*, *exposed vector* turun signifikan hingga mendekati angka 0,1 dalam selang waktu awal sampai 20 bulan. Hal ini dikarenakan masing-masing jumlah subpopulasi pada populasi manusia dan nyamuk di setiap kelas diasumsikan sama. Artinya, setiap subpopulasi yang berada dalam kelas *susceptible* akan masuk dalam kelas *exposed* dan *infected*. Laju pertumbuhan subpopulasi *infected vector* awalnya naik cukup signifikan hingga melebihi angka 0,5 dalam selang waktu awal sampai 20 bulan. Hal ini dikarenakan nyamuk sebagai vektor penyebaran penyakit demam *dengue* tergolong hewan *antropofilik* yaitu menyenangi darah manusia dan mengganas setelah terinfeksi virus *dengue*. Kemudian berkurangnya laju pertumbuhan subpopulasi *infected vector* secara perlahan, grafik bergerak turun hingga menuju suatu titik dan stabil asimtotik di titik tersebut sampai $t \rightarrow \infty$. Hal ini berarti, pada populasi tersebut sudah tidak ada penambahan subpopulasi *susceptible* dan *exposed vector* yang menjadi subpopulasi *infected vector*.

PENUTUP

Model matematika penyebaran penyakit demam *dengue* pada populasi manusia dan nyamuk adalah

$$\begin{aligned}\frac{dS_h}{dt} &= \mu_h N_h - \left(\frac{\beta_h b I_v}{N_h} + p + \mu_h \right) S_h & \frac{dE_v}{dt} &= \left(\frac{\beta_v b I_h}{N_h} \right) S_v - (\mu_v + \delta_v) E_v \\ \frac{dE_h}{dt} &= \left(\frac{\beta_h b I_v}{N_h} + p \right) S_h - (\mu_h + \varphi_h) E_h & \frac{dI_v}{dt} &= \delta_v E_v - \mu_v I_v \\ \frac{dI_h}{dt} &= \varphi_h E_h - (\alpha_h + \mu_h + \gamma_h) I_h\end{aligned}$$

Kestabilan sistem pada model matematika penyebaran penyakit demam *dengue* adalah stabil asimtotik yang menunjukkan kasus endemik dan tidak stabil yang menunjukkan kasus nonendemik. Simulasi penyebaran penyakit demam *dengue* pada suatu model SEIR dalam kasus ini menunjukkan kasus yang endemik, artinya penyakit demam *dengue* masih ada dalam populasi manusia dan nyamuk dengan waktu $t \rightarrow \infty$. Namun, untuk memastikan populasi manusia bebas terinfeksi dari virus *dengue* memerlukan waktu $t \rightarrow \infty$. Hal ini dikarenakan adanya proses penyebaran virus *dengue* yang secara terus menerus antara kedua populasi tersebut. Banyak upaya yang telah dilakukan untuk mencegah penyebaran demam *dengue*. Salah satunya adalah menghilangkan vektor penyebaran penyakit demam berdarah secara perlahan dengan cara 3M sehingga dapat meminimalkan angka kelahiran nyamuk sebagai vektor penyebaran penyakit demam *dengue*. Selain itu, dengan memberikan bakteri *Wolbachia* kepada jentik-jentik nyamuk sebagai vektor penyebaran virus *dengue*. Pemberian bakteri *Wolbachia* menyebabkan nyamuk sebagai vektor penyebaran virus *dengue* bebas dari virus *dengue*.

DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Brisbois BW, Ali SH. *Climate Change, Vector Borne Disease and Interdisciplinary Research: Social Science Perspectives on an Environment and Health Controversy*. Ecohealth, Heidelberg: Springer-Verlag: New York; 2010.
- [2]. Ramesh CD, Sharmila P, Dhillon GPS, Aditya PD. *Climate Change and Threat of Vector-Borne Diseases in India: Are we Prepared*. Heidelberg: Springer-Verlag: New York; 2010.
- [3]. Departemen Kesehatan Republik Indonesia. *Pencegahan dan Pemberantasan Demam Berdarah Dengue di Indonesia*, Depkes, Jakarta; 2007.
- [4]. Derouich M, Boutayeb A, Twizell EH. *A Model of Dengue Fever*. *J. Biomed. Eng. Online.*, 2003; 2: 1-2.
- [5]. Beneson AS. *Control of Communicable Disease in Man*, American public health association, Washington DC; 1990.
- [6]. Ross SL. *Differential Equations. Third Edition*. John Wiley & Sons. India; 2004.
- [7]. Murray JD. *Mathematical Biology. I. An Introduction. Third Edition*. Springer-Verlag: New York; 2002.
- [8]. Boyce WE, DiPrima RC. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. Seventh Edition*. John Wiley & Sons. Inc: New York; 2001.
- [9]. Syafruddin dan Noorani. *SEIR Model For Transmission of Dengue Fever in Selangor Malaysia*. *Int. J. Mod. Phy. Conf.*, 2012; 9:380-389.

HENDRI PURWANTO	: Jurusan Matematika FMIPA Universitas Tanjungpura, Pontianak, hendripurwanto91@gmail.com
EVI NOVIANI	: Jurusan Matematika FMIPA Universitas Tanjungpura, Pontianak, evi_noviani@math.untan.ac.id
MUHLASAH NOVITASARI MARA	: Jurusan Matematika FMIPA Universitas Tanjungpura, Pontianak, noveen_mara@yahoo.co.id
